

Actividad 8

Análisis de Señales y Sistemas

Series de Fourier Complejas

Nombre_____

Dr. Juan-Manuel CAMPOS

En esta actividad pondremos las expresiones de los coeficientes de Fourier de las Series Trigonómicas en función de exponenciales complejas. En otras palabras, obtendremos la expresión compleja de las Series de Fourier.

Recordando la expresión general de las Series Trigonómicas de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \right]$$

donde:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

y

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) dt, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- 1) Demuestra que la siguiente es una forma alternativa de expresar las funciones armónicas (seno y coseno) empleando la identidad de Euler:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}$$

$$\text{donde } \omega_0 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$$

- 2) ¿Cuál es el valor del periodo de la función de las expresiones anteriores? ¿Cuál es el valor del semiperiodo?

- 3) Sustituye en la expresión de las Series de Fourier Trigonómicas de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right) \right]$$

para demostrar las siguientes cuatro expresiones:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

y:

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n)$$

con:

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

- 4) Expandir en Series de Fourier Complejas:

$$f(t) = e^{-t} \quad -\pi < t < \pi$$

Solución:

$$c_n = (-1)^n \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2(1 + nj)\pi} = (-1)^n \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \frac{1 - nj}{n^2 + 1}$$

$$f(t) = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1 - nj}{n^2 + 1} e^{jnt}$$

$$\omega_0 = 1 \quad [\text{rad} / \text{s}]$$

- 5) Grafica $|c_n|$ (¿por qué no graficar c_n ?) ¿Qué significado tiene $|c_n|$?